Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις περισσ. μεταβλητών

Προσσέγγιση μιας συνάρτησης $f: U \to \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, σε μια <<μικρή>> περιοχή του $\bar{x} \in U$. (Θέμα: τοπικά) από πολυώνυμα πολλών μεταβλητών.

Συμβολισμός: $a \in \mathbb{N}_0^n$ $a = (a_1, \dots a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}_0$ ονομάζεται πολυδείκτης (multi-index) τάξης $|a| = a_1 + \dots + a_n \in \mathbb{N}_0$.

και $a! = (a_1!)(a_2!)\dots(a_n!)$.

Επίσης $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ $\bar{x}^a = (x_1^{a_1})(x_2^{a_2})\dots(x_n^{a_n})$

και $D^a f(\bar{x}) = \dfrac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} f(\bar{x})$.

πόσες φορές μερ. παραγω

Π.χ αν $n=3$ $D^{(1,6,27)} f(x,y,z) = \dfrac{\partial^{34}}{\partial x \partial y^6 \partial z^{27}} f(x,y,z)$

$\boxed{\text{Θεώρημα Taylor}}$ για συναρτήσεις περισσ. μεταβλητών. Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$: ανοιχτό, και $f \in C^k(U) \Leftrightarrow f$ k-φορές συν. διαφορίσιμη $:\Leftrightarrow \exists$ όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και k τάξης και είναι συνεχείς.

Τότε για $\bar{x} \in U$ ισχύει

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = T_{k,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{h}) + o(\|\bar{h}\|^k) \quad \text{για } \bar{h} \to \bar{0}.$$

$$:\Leftrightarrow \boxed{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{h}) - T_{k,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{h})}{\|\bar{h}\|^k} = 0}$$

Νόρμα η ες το κ.

Γενικά $f(\bar{x}) = o(g(\bar{x}))$

ή $f = o(g)$ για $\bar{x} \to \bar{0}$

σημαίνει ότι

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{0}} \frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = 0$$

(συμβολισμός Landau).

«μικρό» ομικρον

όπου $T_{k,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{h})$ ονομάζεται πολυώνυμο Taylor k βαθμού της f στο $\bar{x}$

$$\boxed{T_{k,f,\bar{x}}(\bar{x}+\bar{h}) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}_0^n \\ \underbrace{|a|\le k}_{\text{μέχρι και τάξης } k}}} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{h}^a}$$

πρόσθεση $= a_1 + \dots + a_n$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \dots + x_n$

Παραδείγματα (ειδικές περιπτώσεις)

α) για $k=0$: $f \in C^0(U) = C(U)$

(δηλ. $f: U \to \mathbb{R}$ σ/ς)

Θ. Taylor: $f(\bar{x}+\bar{h}) = \dots + \overset{\text{όμικρον}}{o(1)}$ για $\bar{h} \to \bar{0}$

αφού $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}_0$ με $|a| = a_1 + \dots + a_n \le 0$

$\Rightarrow a = (0, \dots, 0)$.

$$D^{(0,\dots,0)} f(\bar{x}) = \frac{\partial^0 (f(\bar{x}))}{\partial x_1^0 \dots \partial x_n^0} := f(\bar{x})$$

[παραγωγίσαμε μερικώς 0 φορές και θέλαμε το αποτέλεσμα αυτής να είναι σ/ς συνάρτηση] και $a! = a_1! \cdots a_n! = 0! \cdots 0! = 1$

$a = (0, \dots, 0) := 1.$

$\bar{n}^a = n_1^{a_1} \cdots n_n^{a_n} \underset{a=(0,\dots,0)}{=} n_1^0 \cdots n_n^0 = 1$

(δηλ για $k=0$, το Θ. Taylor λέει αν f σ.ls τοτε στο $\bar{x} \in U$ θα έχαμε
$\lim_{\bar{n} \to 0} \left(\frac{f(\bar{x}+\bar{n}) - f(\bar{x})}{1} \right) = 0 \iff \lim_{\bar{n} \to \bar{0}} f(\bar{x}+\bar{n}) = f(\bar{x})$.)

β) για $k=1$ το Θ. Taylor:
Αν $f \in C^1(U)$ (δηλ συνεχώς διαφορίσιμη).
Τοτε $f(\bar{x}+\bar{n}) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}_0^n \\ |a| \leq 1 \\ k}} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{n}^a + o(\|\bar{n}\|)$ για $\bar{n} \to \bar{0}$.

$$= \underbrace{f(\bar{x})}_{\text{για } a=0} + \sum_{|a|=1} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!} \bar{n}^a$$

$|a|=1$ σημαίνει $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{N}_0$
$|a| = a_1 + \dots + a_n$
$\underset{|a|=1}{\Longrightarrow} a = \underbrace{f_i}$, $i = 1, \dots, n$
$= (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0,)$.

Άρα $f(\bar{x}+\bar{n}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(\bar{x}) n_i}_{= \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{n}.} + o(\|\bar{n}\|)$
για $\bar{n} \to \bar{0}$

δηλ για $k=1$ το Θ. Taylor λέει:
Αν $f \in C^1(U)$, τοτε $\lim_{\bar{n} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{n}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{n}}{\|\bar{n}\|} = 0$

γνωστό.

γ) $\boxed{k=2}$ $f(\bar{x}+\bar{n}) = \underset{(\text{για } |a|=0)}{f(\bar{x})} + \underset{(\text{για } |a|=1)}{\nabla f(\bar{x})\cdot\bar{n}} + \sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{n}^a +$

$+ o(\|\bar{n}\|^2)$

$a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $|a| = a_1 + \ldots + a_n = 2$ για $\bar{n} \to \bar{0}$

$\Rightarrow$ ή $a = (0, \ldots, 2, 0, \ldots 0) = 2\bar{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$.
$\uparrow$ i θέση

ή $a = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \bar{e}_i + \bar{e}_j$
$\uparrow$ i θέση $\uparrow$ j θέση με $\boxed{i<j}$

με $i, j = 1$.
με $i<j$

Για $a = 2\bar{e}_i \Rightarrow a! = 2$, για $a = \bar{e}_i + \bar{e}_j$
$\Rightarrow$ $\boxed{a! = 1} \Rightarrow$

$\underbrace{(a_1!)}_{=0!}\underbrace{(a_i!)}_{=1!}\underbrace{(a_j!)}_{=2!} \ldots \underbrace{(a_n!)}_{=0!} =$

$\Rightarrow \sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{n}^a = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{D^{2\bar{e}_i} f(\bar{x})}{(2\bar{e}_i)!}\bar{n}^{2\bar{e}_i}}_{\sum \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{2\,\partial x_i^2} n_i^2} +$

$+ \underbrace{\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \frac{D^{\bar{e}_i+\bar{e}_j} f(\bar{x})}{(\bar{e}_i+\bar{e}_j)!}\bar{n}^{\bar{e}_i+\bar{e}_j}}$ ← ευθέως ⟶ δόση $= n_1^0 \ldots n_{i-1}^0 n_i^1 n_{i+1}^0$

$= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j$

Άρα τελικά

$\sum_{|a|=2} \frac{D^a f(\bar{x})}{a!}\bar{n}^a = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} n_i n_j = \cancel{\frac{1}{2}}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_j}_{=(a_{i1},\dots a_{in})\cdot \bar{h}}\Big) h_i =$$

$$= (h_1, \dots, h_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} h_1 \\ \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{h}^T A \cdot \bar{h}.$$

Συνεχίζω

$$= \frac{1}{2} (h_1, \dots, h_n) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{H_f(\bar{x}) (=: D^2 f(\bar{x}))} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Δηλ. για $n=2$ το Θ. Taylor λέει:

Αν $f \in C^2(U)$, τότε

$$f(\bar{x}+\bar{h}) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{h} + \frac{1}{2} \bar{h}^T H_f(\bar{x}) \bar{h} + o(\|\bar{h}\|^2)$$

Ο Εσσιανός πίνακας για $\bar{h} \to \bar{0}$ (συμμετρικός)

SOS SOS

Πρώτο Θέμα Σεπτεμβρίου

Άσκηση - Παράδειγμα: Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\overbrace{x^y}^{e^{y\ln x}} - y(x-1) - 1}{x^2+y^2-2(x+y-1)}$$

Έστω $f(x,y) = x^y = e^{y\ln x}$, $(x,y) \in (0,\infty)^2 = (0,\infty)\times(0,\infty)$

$= (x-1)^2+(y-1)^2$

$$f(x,y) = f(x-1+1,\ y-1+1) \underset{\text{Θ.Taylor}}{=} \underbrace{f(1,1)}_{=1} + \underbrace{\nabla f(1,1)(x-1,y-1)}_{=x-1}$$

βρήκε ναι

$$+\frac{1}{2}(x-1)(y-1)\ Hf(1,1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

για $(x,y)\to(1,1)$ $+\,o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)$

όπου $f(1,1) = 1$

και $\nabla f(x,y) = \underbrace{e^{y\ln x}}\left(\frac{y}{x}, \ln x\right)$.

κάθετη ⇒

και ⇒ $\nabla f(1,1) = (1,0)$

το παραγωγίζω ως προς x για Hf

επομένως ⇒ $Hf(x,y) = e^{y\ln x}\begin{pmatrix} \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2}\right) & \ln x\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x} \\ \frac{y}{x}\ln x + \frac{1}{x} & (\ln x)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ασκήσεις